テンソル

Teamil9

2022 年 1 月 15 日

はじめに

物理学科に所属する人はよくテンソルというものを天下り的に説明されたり、使い方だけ教わるのみでその正体については講義の中では全くといっていいほど触れられてこず、その実際の正体というものを知らない人が多い。今回のこの pdf ではテンソルが一体どんな概念なのかわからない人たちにとってテンソルとは（数学的には）どういうものなのかがざっくりと理解できるようになることを目指す。

前提知識としては、ベクトルの定義や、基底の存在、線形写像（関数）の定義などは知っていることと仮定している。[*1]つまり大学初年度の線形代数程度の基礎的概念が頭に入っていることのみである。

また、有限次元の線形代数に限って話を進めていくため、無限次元でここの知識が使えるかどうかは定かではない。[*2]

そして、テンソルの定義の方法にはいくつか流儀が存在する。ここでは紹介しないが、変換に対する変換則で定義する方法[*3]や、普遍的な性質から定義を行う[*4]方法などがある。この中で、今回私は、多重線型写像を用いたテンソルの定義を行うこととする。また、抽象性をできる限り排除したかったり、テンソルそのものをどのように書けるのかをみるのが目的だったりするので、その代数的構造等についてはここでは見ない。[*5]

[*1] 線形代数の教科書なら絶対にある内容なので、わからない人は線形空間について書かれている章を参考にしてほしい。

[*2] 私もこれから勉強しなければと考えている。

[*3] これはやや物理より

[*4] 私はこちらについては全く詳しくなくそういう定義の仕方もあるらしいということだけを知っているので詳しくは参考文献を参考にしてほしい

[*5] 代数的構造も考えるととても面白いし、物理的な意味も持ちうるので、興味のある方は勉強してみると良いかもしれない。

目次

第 1 章

線形空間の基礎的概念

1.1　ベクトルとその記法

以下では係数体が $\mathbb{K}$ であるベクトル空間 V を考える。（$\dim V = N$）多くの教科書ではベクトルの記法として、矢印を上に書く記法や、太字にする記法などが用いられているが、ここではケットと呼ばれる次の書き方でベクトルを書くこととする：

$$|a\rangle \in V$$

この記法を用いるのは成分とベクトルと分けて記述ができ、基底とその成分の明示がしやすいためである。後に用いるので、既知のものとはしていたが、ベクトル空間の公理について触れておこう。

定義 1.1: ベクトル空間

集合 V の元に対して、元同士の和と呼ばれる演算と、ある係数体[a]$\mathbb{K}$[b]が存在してそのスカラー倍が存在して、次が成立するとき、V をベクトル空間と呼ぶ。

1. 結合法則：$|x\rangle + (|y\rangle + |z\rangle) = (|x\rangle + |y\rangle) + |z\rangle$
2. 交換法則：$|x\rangle + |y\rangle = |y\rangle + |x\rangle$
3. 零元の存在：$\mathbf{0}$ が存在して、$\mathbf{0} + |x\rangle = |x\rangle$
4. 逆元の存在：$|x\rangle$ についてある $(-|x\rangle) \in V$ が存在して $|x\rangle + (-|x\rangle) = 0$
5. スカラーの和への分配則：$(a+b)\,|x\rangle = a\,|x\rangle + b\,|x\rangle$
6. ベクトルの和への分配則：$a(|x\rangle + |y\rangle) = a\,|x\rangle + b\,|y\rangle$
7. スカラー倍の結合則：$(ab)\,|x\rangle = a(b\,|x\rangle)$
8. １倍の定義：$1\,|x\rangle = |x\rangle$

ここで、$|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ は V の任意の元とし、a, b は $\mathbb{K}$ の任意の元としている。

[a] (ベクトルの) 係数 (となる) 体
[b] 多くは複素数体 $\mathbb{C}$ や実数体 $\mathbb{R}$ である。

1.2　内積と双対空間、そして表現定理へ

ベクトル空間の元同士の間の関係性を探るということでは内積はとても重要な概念である。ここでは先のブラとケットを用いた記法を用いて内積の議論をしよう。

数学的な内積の定義は次のようである。

定義 1.2: 内積

V:係数体を $\mathbb{K}$ とするベクトル空間

V の任意の二つの元 $|a\rangle, |b\rangle$ を $\mathbb{K}$ に移す写像 g があって、g が次を満たす時、g を内積と呼ぶ。

（i）$g(|a\rangle, |b_1\rangle + |b_2\rangle) = g(|a\rangle, |b_1\rangle) + g(|a\rangle, |b_2\rangle)$

（ii）$g(|a\rangle, |b\rangle) = [g(|b\rangle, |a\rangle)]^*$

（iii）$g(c|a\rangle, |b\rangle) = c^* g(|a\rangle, |b\rangle), \quad g(|a\rangle, c|b\rangle) = cg(|a\rangle, |b\rangle)$

（iv）$0 \leq g(|a\rangle, |a\rangle)$　等号成立は、$|a\rangle = 0$ であるとき。

ベクトル空間 V にこのような g が存在するとき、V を内積空間と呼ぶ。

ここで、ベクトル空間 V の基底として次のような基底を取ろう。

$$\{\{|k\rangle\} \in V | 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}\} \tag{1.1}$$

この基底でベクトル $|a\rangle, |b\rangle$ は次のように線形結合で表せるとしよう。

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle, \quad |b\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i |i\rangle \tag{1.2}$$

すると、この二つのベクトルの内積は内積の定義の (i) と (iii) を用いて次のように書けるだろう。

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle, \sum_{j=1}^{n} b_j |j\rangle\right) \tag{1.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^* \, g\left(|i\rangle, \sum_{j=1}^{n} b_j |j\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^* b_j \, g(|i\rangle, |j\rangle) \tag{1.4}$$

この結果を見るに、ベクトルの内積というのはどうも基底同士の内積の関係を決めることで決定されることが見える。以下利便性のために、基底同士の内積を次のようにとる。

$$g(|i\rangle, |j\rangle) := \delta_{ij} \tag{1.5}$$

このように内積がとられたとき、現在の基底の組は正規直交基底と呼ばれる。*1 このように基底が取られた時には、ベクトル $|a\rangle, |b\rangle$ の内積は、

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i \tag{1.6}$$

となる。

*1 卵が先か鶏が先かみたいな話だが、通常は内積を決めてそれに対する基底として正規直交基底をとるなどをする。ここでは論理の展開の都合上、基底を決めて、それが正規直交基底となるように内積を決めることができるとしている。

1.2.1　双対空間

ここで、線形写像について考えてみよう。線型写像の定義は次のようである。

定義 1.3: 線型写像

V, V':係数体を $\mathbb{K}$ とするベクトル空間
この時に、写像 $T : V \to V'$ が任意のベクトル $|a\rangle, |b\rangle \in V, c \in \mathbb{K}$ に対して、
（i）$T(|a\rangle + |b\rangle) = T(|a\rangle) + T(|b\rangle)$
（ii）$T(c\,|a\rangle) = c\,T(|a\rangle)$
を満たすとき、T を V から V' への線型写像という。

さて、ここでは $V' = \mathbb{K}$ のときを考える。このような写像を次のように書き、これをブラ（ベクトル）と呼ぶ：

$$\langle A| : V \to \mathbb{K} \tag{1.7}$$

名称にベクトルとついた通り、V から $\mathbb{K}$ への線型写像全体の集合は実はベクトル空間をなす。このことを示そう。

命題 1.4

V から $\mathbb{K}$ への線型写像全体の集合はベクトル空間を成す。

[証明]
線型写像の和はまた線型写像となる。実際、$\langle a| = \langle b| + \langle c| : V \to \mathbb{K}$ [*2]とした時に、任意の $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して、

$$\begin{aligned}\langle a|\,(\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle) &= \langle b|\,(\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle) + \langle c|\,(\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle)\\ &= \alpha\{\langle b|\,(|\psi\rangle) + \langle c|\,(|\psi\rangle)\} + \beta\{\langle b|\,(|\phi\rangle) + \langle c|\,(|\phi\rangle)\}\\ &= \alpha\,\langle a|\,(|\psi\rangle) + \beta\,\langle a|\,(|\phi\rangle)\end{aligned}$$

となって示される。結合法則、交換法則に関しては自明に成り立つだろう。また、零ベクトルは V の元を全て 0 に対応させる写像として定義でき、逆ベクトルはそれぞれの元を -1 倍したものとして定義可能。[*3]
元のスカラー倍に関する法則も、同様に成り立つ。よって、ベクトル空間の公理を満たすことが示される。　□

このような V から $\mathbb{K}$ への線型写像全体の集合のことを V の双対空間と呼び、V^* などと書く。この双対空間の双対空間についても考えることができるが、これは元のベクトル空間と同型であるため[*4]普通物理や数学では同一視を行う。つまり、$|x\rangle \in V$ を $|x\rangle : V^* \to \mathbb{K}$ という線型写像とみなすのだ。

この双対空間でもベクトル空間 V と同様に内積を取ることができる。この内積から正規直交座標として

*2 ここで、写像の和を $(\langle a| + \langle b|)(|c\rangle) := \langle a|\,(|c\rangle) + \langle b|\,(|c\rangle)$ と定義する。
*3 $\langle\cdot|\,(|a\rangle) = \langle x|\,(|a\rangle) - \langle x|\,(|a\rangle) = 0$ となる。
*4 ここでは示さない。

$\{\langle i|\,|i=1,\ldots,N\}$ を用いると、$\forall\langle a|\in V^*$ は

$$\langle a| = \sum_{i=1}^{N} a_i \langle i| \tag{1.8}$$

として表されることとなる。これに V の元 $|b\rangle = \sum_{i=1}^{N} b_i |i\rangle$ を入れると、

$$\langle a|\,(|b\rangle) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i b_j \langle i|\,(|j\rangle) \tag{1.9}$$

つまり双対空間によって移す先は双対空間の基底と、ベクトル空間の基底の間の関係が重要な鍵を握っているとみることができそうだ。また、この先の利便性のために、以降では双対空間の基底として、

$$\langle i|\,(|j\rangle) = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

となるような基底を取るようにする。このような基底を取ることができることについては読者への演習問題としておこう[*5]

1.3 表現定理

さて、ここまでで V の元を二つの方法で係数体 $\mathbb{K}$ のある数に対応させるのを見た。一つは、内積。もう一つは線型写像である。ここで、内積の二つのスロットのうち一つが埋まっている状況を考えてみるとこれは

$$g(|a\rangle\,,\quad) : V \to \mathbb{K} \tag{1.11}$$

である。しかもこれは線形性を持つから線型写像である。つまり、内積の一つのスロットが埋まったものは双対空間のある元になっているのだ。これがどんな元となっているのかを確かめてみよう。まず、$|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle$ とすると、

$$g(|a\rangle\,,\quad) = g\left(\sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle\,,\quad\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i^* g(|i\rangle\,,\quad) \tag{1.12}$$

と書ける。ここで、V の基底 $|j\rangle\,(j=1,\ldots,N)$ を右のスロットにいれると、

$$g(|a\rangle\,,\quad)(|j\rangle) = \sum_{i=1}^{N} a_i^* g(|i\rangle\,,\quad)(|j\rangle) = \sum_{i=1}^{N} a_i^* \delta_{ij} \tag{1.13}$$

となった。[*6]これをみるに、$g(|i\rangle\,,\quad)$ なる写像は $\langle i|$ と同じような作用をすることが確認できる。さらに、$g(|a\rangle\,,\quad)$ と $\langle a|$ とが一致することも見える。ここから、内積のすでにスロットを埋めたものに対応する双対ベクトルが存在するのではないかという予想が立つ。これを証明していこう。

定理 1.5: 表現定理

V : 係数体が $\mathbb{K}$ の内積空間

[*5] 書く時間がちょっと無いので・・・申し訳ないです・・・

[*6] ここで、内積の中に二つ入れてしまうとわかりにくいと考えられたので、あえて、$g(|a\rangle\,,\quad)(|\cdot\rangle)$ なる書き方をしている。

任意の $\langle a| \in V^*$ に対して、$|a\rangle \in V$ が存在して、

$$\langle a| (|b\rangle) := g(|a\rangle, |b\rangle), \quad |b\rangle \in V \tag{1.14}$$

が成り立つ。しかも、このような $|a\rangle$ はただ一つ。

[証明]

まず存在することはすでに示されたと考えられるので、ここでは一意性のみを証明しよう。$\langle a|$ に対して、$|a\rangle$ の他に、$|a'\rangle\ (\neq |a\rangle)$ でも同じように表せると仮定しよう。すると、

$$\langle a| (|b\rangle) = g(|a\rangle, |b\rangle) = g(|a'\rangle, |b\rangle) \tag{1.15}$$

と書ける。内積の線形性から、

$$g(|a\rangle - |a'\rangle, |b\rangle) = 0 \tag{1.16}$$

となる。ここで、任意のベクトル $|b\rangle$ 対して、内積が 0 となるということは、$|a\rangle - |a'\rangle$ はゼロベクトル。つまり、$|a\rangle = |a'\rangle$ となり仮定に矛盾し、一意に存在することが示される。 □

こうして、内積と双対ベクトルの関係性が示された。[*7] さて、ここで言葉の定義を行う。

定義 1.6: 双対なベクトル

（双対）ベクトル空間 $V(V^*)$ の元 $|a\rangle\ (\langle a|)$ の双対関係にあるベクトルもしくは双対なベクトルとは、

$$\langle a| (|a\rangle) = g(|a\rangle, |a\rangle) \tag{1.17}$$
$$(|a\rangle (\langle a|) = g^*(\langle a|, \langle a|)) \tag{1.18}$$

となるようなベクトルのことを言う。[a]

[a] ここで、g^* は双対ベクトル空間におけるベクトル空間 V の計量と無矛盾な内積とする。

以降、$|\cdot\rangle$ の双対なベクトルはすべて、$|\rangle$ の中のラベルが同じとした $\langle\cdot|$ として、記述していく。つまり、

$$|a\rangle \overset{\text{Dual Coupling}}{\longleftrightarrow} \langle a| \tag{1.19}$$

また、以後記法を改めて、

$$\langle a|b\rangle := \langle a| (|b\rangle) \equiv g(|a\rangle, |b\rangle) \tag{1.20}$$

を用いていくことにしよう。

[*7] 相対性理論や微分幾何学等では添字を用いた記法を使い、添字の上げ下げを計量テンソル $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ を用いて行っていたが、そのトリックの種がこの双対ベクトルと内積（計量）の間の関係性なのだ。今回内積に限って、定理を証明したが、もっと弱い定義である計量でも同様に示すことができる。（まぁこの証明で使っているのは線形性と非退化性のみであるから、ノルムが正定値とは限らなくても特に問題はないわけである。）

第 2 章

テンソルの概念

2.1　双線形関数

ここまでで、内積と呼ばれる線型性を持つスロットが二つの写像を見た。あの写像は、

$$g : V \times V \to \mathbb{K} \tag{2.1}$$

というような写像で、[*1] V の元をいれるスロットが二つあってそのそれぞれに対して線形性を持つという写像であった。次はこのような写像に関して、考察をしていくこととする。

定義 2.1: 双線形写像

V, V':係数体を $\mathbb{K}$ とするベクトル空間
写像 $\langle a| \otimes \langle b| : V \times V' \to \mathbb{K}$ に対して、次が成立するとき、写像 $\langle a| \otimes \langle b|$ を双線形函数と呼ぶ。

$$\begin{aligned}&\langle a| \otimes \langle b| \left(\alpha |c\rangle + \beta |d\rangle, \gamma |e\rangle + \delta |f\rangle\right) \\ &\quad = \alpha\gamma \langle a| \otimes \langle b| \left(|c\rangle, |e\rangle\right) + \alpha\delta \langle a| \otimes \langle b| \left(|c\rangle, |f\rangle\right) + \beta\gamma \langle a| \otimes \langle b| \left(|d\rangle, |e\rangle\right) + \beta\delta \langle a| \otimes \langle b| \left(|d\rangle, |f\rangle\right)\end{aligned}$$

ここで、$|c\rangle, |d\rangle \in V, |e\rangle, |f\rangle \in V', \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$

さて、一個のスロットの線形関数全体の集合がベクトル空間を成すのだから、じゃあスロットを増やしてやっても同じ結果が得られるのではないかという予想が立つだろう。その予想は正解で、双線形写像もベクトル空間を成すのだ。このことについては双対ベクトル空間がベクトル空間であると示したときと同じようにして示すことができる。なのでそのことについては特に示さない。[*2]

2.2　テンソル積

さて、双線形写像の定義のときにすごく意味ありげに $\langle a| \otimes \langle b|$ というような書き方をした。なぜこのような書き方をしたのかをスロットに入れたベクトルを基底の展開をして見ていくこととしよう。

$\langle a| \otimes \langle b| : V_A \times V_B \to \mathbb{K}$ を双線形関数、$|c\rangle_A \in V_A, |d\rangle_B \in V_B$ とし、V_A, V_B の正規直交基底を

[*1] ここで、$A \times B$ という集合は直積集合というもので、平たくいうと A の元と B の元の組の集合と考えていただくと良い。
[*2] 気になる方はベクトル解析 30 講等を参照してほしい。

$|i\rangle_A, |j\rangle_B\ (i = 1, \cdots, \dim V_A, j = 1, \cdots, \dim V_B)$ としたときの基底の展開を

$$|c\rangle_A = \sum_{i=1}^{\dim V_A} c_i |i\rangle_A, \quad |d\rangle_B = \sum_{i=1}^{\dim V_B} d_i |i\rangle_B \tag{2.2}$$

として、$\langle a| \otimes \langle b| (|c\rangle, |d\rangle)$ を考えよう。スロットの右側が埋まっているものとして考えると、

$$\langle a| \otimes \langle b| (\quad, |d\rangle)(|c\rangle) = \sum_{i=1}^{\dim V_A} c_i \langle a| \otimes \langle b| (\quad, |d\rangle) (|i\rangle_A) \tag{2.3}$$

これは V の元に V^* の元を作用させた形とまるで同じである。同様にして、スロットの左側が埋まっているものとして考えると、

$$\langle a| \otimes \langle b| (|d\rangle, \quad)(|d\rangle) = \sum_{i=1}^{\dim V_B} d_i \langle a| \otimes \langle b| (|c\rangle, \quad) (|i\rangle_B) \tag{2.4}$$

これも V' の元に V'^* の元を作用させた形とまるで同じである。したがって、双線形写像 $\langle a| \otimes \langle b|$ の元というものは、V_A^* の元と V_B^* の元の掛け合わせたものであると考えられよう。その意味で、この双線形写像を（2.3）（2.4）式の写像とそれぞれがちょうど合致するような $\langle a|_A \in V_A^*, \langle b|_B \in V_B^*$ を持ってきて、$\langle a| \otimes \langle b|$ を $\langle a|_A$ と $\langle b|_B$ のテンソル積と呼ぶ。さらに、集合単位で考えると、このような $V_A \times V_B \to \mathbb{K}$ となるような写像全体の集合を V_A と V_B のテンソル積と呼び、

$$V_A \otimes V_B \tag{2.5}$$

と書く。以降ベクトル同士のテンソル積を

$$\langle a|_A \langle b|_B := \langle a|_A \otimes \langle b|_B \tag{2.6}$$

と記述していくこととする。

2.3　テンソル積を考える

前の節では一般のベクトル空間 V と V' の間でのテンソル積を考察していたがこれの特別な場合

- $V_A = V_B = V$ or $V_A = V_B = V^*$ の場合
- $V_B = V_A^* = V^*, V_A = V$ の場合

を考えていこう。

（$V_A = V_B = V$ or $V_A = V_B = V^*$ の場合）

これは単純に、

$$|a\rangle |b\rangle \in V \otimes V \text{ or } \langle a| \langle b| \in V^* \otimes V^* \tag{2.7}$$

と書く。ここで、スロットを一つ埋めた場合を考えてみると、

$$|a\rangle |b\rangle (\langle c|) \text{ or } \langle a| \langle b| (|c\rangle) \tag{2.8}$$

ここで例えば、右側のスロットに入れたとしたときに記法としては、

$$|a\rangle \langle c|b\rangle \text{ or } \langle a| \langle b|c\rangle \tag{2.9}$$

というような形に書くと定義すると、これは、V^* or V を V or V^* の元に変化させていることがわかりやすいだろう。($\langle\cdot|\cdot\rangle$ の形のものは単なるスカラーである。)ここで現れた $|\cdot\rangle\,|\cdot\rangle$ はダイアディックと呼ばれるものであり、電磁気学などにおいてたまに現れる。また、内積の写像も実はこの形のものだ。[*3]

($V_B = V_A^* = V^*, V_A = V$ の場合)

こちらの場合の方が直前の場合よりも実は幾分馴染みのあるものである。記法としては、

$$|a\rangle\!\langle b| := |a\rangle \otimes \langle b| \tag{2.10}$$

というように書く。これに対して、$|c\rangle \in V$ のみをスロットに入れてやると、

$$|a\rangle\,\langle b|c\rangle \in V \tag{2.11}$$

これは、線形変換と同じことをやってることに気づくだろう。つまり、線形変換写像はその多くが $|\cdot\rangle\!\langle\cdot|$ の形に書け、物理学でよく用いていた線形変換の行列等はこのような双対ベクトルとベクトルのテンソル積であったということにここで気づけるはずだ。ここでこのようなことを言われてもまだ納得がいかない方は多いと思うが次の節を見ると具体的にどのようであるかがわかるはずだ。

2.4　テンソル積の基底表示と物理のテンソル

テンソル積 $|a\rangle\,|b\rangle$ や $|a\rangle\,\langle b|$ や $\langle a|\,\langle b|$ などはベクトル空間の元であった。なので、これの基底を考察することは有意義なはずだ。ここから先は $|a\rangle\!\langle b|$ の形についてのみ話を絞っていくが、これ以外のテンソル積に関しても、写像の移す前後が若干ちがうだけでほとんど同じ議論となる。

さて、$|a\rangle\!\langle b|$ は $V \otimes V^*$ の元であるし、(2.3)(2.4)式の議論で、それぞれの基底で分けられることはわかったはずであるので、$|i\rangle\ (i = 1, \cdots, \dim V)$ を V の正規直交基底として

$$|a\rangle\!\langle b| = \sum_{i,j=1}^{\dim V} a_i b_j\, |i\rangle\!\langle j| \tag{2.12}$$

と書けそうであり、ここで現れた実際に $|i\rangle\!\langle j|$ は $V \otimes V^*$ の基底となる。(実際にこれ以上これ以下の基底が存在するしないと考えてみて、先のスロットに一つ $|\cdot\rangle$ か $\langle\cdot|$ を入れてみたら、V の元もしくは V^* の元にならないことがわかって、これまでの話と矛盾することが見えるはずだ。)一意性についても簡単に示すことができる。

さて、基底についてわかったのでここで物理で現れるテンソル(Maxwell の応力テンソルを例にして)について考えてみよう。Maxwell の応力テンソルといえば、つぎのような行列で書かれることが多いだろう。

$$T^i{}_j = \begin{pmatrix} E_1E_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_1E_2 & E_1E_3 \\ E_2E_1 & E_2E_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_2E_3 \\ E_3E_1 & E_3E_2 & E_3E_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix}^i{}_j \tag{2.13}$$

[*4]ここで、テンソルは行列だと思う方が多くいると思うが違う。これはベクトルを $\mathbb{R}^3$ へ同型写像で写した際に、積がちょうど行列の演算に対応するように並べ替えたものにすぎない。(対称行列になっているため少しわかりにくいが。)成分表示を用いた表し方の方が実はより源流に近づいていて、

$$T^i{}_j = E^i E_j - \frac{\delta^i{}_j}{2} E_k E_k \tag{2.14}$$

[*3] 内積の定義を見直すと良い

[*4] $1 \to x, 2 \to y, 3 \to z$ と読み替えるとわかりやすいかと思う。

と書ける。[*5]ここで現れた形は略されているものがあり、本来テンソルとして書くべき式としては、

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T^i{}_j \, |i\rangle\langle j| = \sum_{i,j=1}^{3} \left(E^i E_j - \frac{\delta^i{}_j}{2} E_k E_k \right) |i\rangle\langle j| \tag{2.15}$$

である。つまり、物理学であらわれるテンソルは基底を略して書いたり、[*6]同型写像で移したもの[*7]をテンソルと呼んでいるのだ。

テンソルは行列ではない。その正体は双（多重）線形写像であるのだ。そして、物理学で現れるテンソルには基底が隠れている。そのことについて今まで意識していなかった人もこれから少し意識するようになっていただければ嬉しい。

2.5　さらなる展望

ここでは 2 階のテンソルまでしか扱わなかった。しかし、物理学で色々学んだ人たちは見たことがあるはずだ

$$\varepsilon_{ijk},\ R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda},\ \mathrm{etc} \tag{2.16}$$

といった添字がいくつも存在するテンソルたちを。これらのテンソルも、上の双線形関数を用いた定義を拡張して、n 重線形関数を定義していけば、これらの高階のテンソルについても数学的に考えることが可能となる。

また、今回扱わなかったテンソル代数の話や、表現論につながる話、曲率などの幾何的なものにつながる話など、テンソルを起点として様々な概念が現れてくることだろう。読者の方々にはこれからテンソルについて苦手意識を持つことなく、これから学ぶであろう分野を理解していけることを切に願う。

2.6　全体に関する注釈

・途中で双線形写像の二つあるスロットのうちに一つ入れるという操作を行ったがあれは成分計算における縮約をしていることと同義である。

[*5] Einstein 縮約記法を用いている。

[*6] このようなことをして大丈夫なのかと思うがこれは大丈夫で、基底の情報は添字に残っているため、基底についてわざわざ書かなくても問題がないのである。初学者にはわかりづらいが

[*7] 別にこの記法が悪いと言うわけでなく、初学者の方などはおそらくこちらで学んでいくことで計算を身につけることができる。ただ、よりハイレベルな内容を考えていくときに（高階のテンソルや、ダイアディックなど）これだけの理解では足りなくなってくるし、行列とテンソルがごっちゃごちゃになるので、今回この pdf を書いて、テンソルと行列の間のごちゃごちゃを無くそうという目論見があった。

参考文献

[1] 齋藤 正彦. 基礎数学１ 線形代数入門. 東京大学出版会, 2018.
[2] 新井 朝雄. 物理現象の数学的諸原理. 共立出版, 2013.
[3] 雪江 明彦. 代数学２　環と体とガロア理論. 日本評論社, 2016.
[4] 堀田 昌寛. 入門現代の量子力学. 講談社, 2021.
[5] J.J.Sakurai. 第２版現代の量子力学（上）. 吉岡書店, 2019.
[6] 志賀 浩二. ベクトル解析 *30* 講. 朝倉書店, 2008.